$$\langle z,h_j\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle z_n,h_j\rangle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\langle h_k,h_j\rangle=\xi_j \quad ; \quad j=1,2,3,....$$

أي أن الأعداد $\xi_1,\xi_2,....$ هي عوامل فورييه للعنصر z.

إذاً φ غامر ولهذا فإن φ إيزومورفيزم من H إلى ℓ_2 إذاً H و ℓ_2 إيزومورفيان لبعضهما. وطالما أن H اختياريّ نكون قد حصلنا على المطلوب .

(٤-٣) تمارين محلولة :

تمرين محلول (١) :

ليكن x,y عنصرين من فضاء هيلبرت برهن صحة التكافؤ :

$$x\perp y \Leftrightarrow \|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\| \ , \ \forall\alpha\in\mathbb{C}$$

الحل :

$(\Rightarrow)$: $x\perp y \Rightarrow \langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle=0$ وبالتالي لدينا:

$$\bullet\|x+\alpha y\|^2=\langle x+\alpha y,x+\alpha y\rangle=\|x\|^2+|\alpha|^2.\|y\|^2+\alpha\langle y,x\rangle+\bar{\alpha}\langle x,y\rangle$$

$$=\|x\|^2+|\alpha|^2.\|y\|^2+2\operatorname{Re}\alpha\underbrace{\langle x,y\rangle}_{=0}=\|x\|^2+|\alpha|^2.\|y\|^2$$

$$\bullet\|x-\alpha y\|^2=\langle x-\alpha y,x-\alpha y\rangle=\|x\|^2+|\alpha|^2.\|y\|^2-2\operatorname{Re}\alpha\underbrace{\langle x,y\rangle}_{=0}$$

$$=\|x\|^2+|\alpha|^2.\|y\|^2$$

لذلك فإن : $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$.

$(\Leftarrow)$: بفرض أن $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$ عندئذٍ يكون:

$$\|x\|^2+|\alpha|^2.\|y\|^2+2\operatorname{Re}\alpha\langle x,y\rangle=\|x\|^2+|\alpha|^2.\|y\|^2-2\operatorname{Re}\alpha\langle x,y\rangle\Rightarrow$$

$$4\operatorname{Re}\alpha\langle x,y\rangle=0$$

$\bullet\ \alpha=1 \Rightarrow 4\operatorname{Re}\langle x,y\rangle=0 \Rightarrow \operatorname{Re}\langle x,y\rangle=0$

العدد = مرافقه عندما يكون حقيقي

$\bullet\ \alpha=i \Rightarrow \|x+iy\|=\|x-iy\|$

أي أن $\langle x-iy,x-iy\rangle = \langle x+iy,x+iy\rangle$ وبالتالي فإن $\operatorname{Im}\langle x,y\rangle=0$

ومنه فإن: $\langle x,y\rangle=0\Rightarrow x\perp y$.

$$Im\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

تمرين محلول (٢) :

بفرض أن $x_1, x_2, ..., x_n$ عناصر متعامدة مثنى مثنى في الفضاء H ومغايرة للصفر برهن صحة مساواة فيثاغورث :

$$\|x_1 + x_2 + ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_n\|^2$$

الحل :

$$\|x_1 + x_2 + ... + x_n\|^2 = \langle x_1 + x_2 + ... + x_n \;,\; x_1 + x_2 + ... + x_n \rangle$$

وحيث إن :
$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases}$$

وبالتالي فإن :

$$\|x_1, x_2, ..., x_n\|^2 = \langle x_1, x_1 \rangle + 0 + ... + \langle x_2, x_2 \rangle + 0 + ... + \langle x_n, x_n \rangle$$
$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_n\|^2$$

تمرين محلول (٣) :

ليكن x, y عنصرين من فضاء هيلبرت برهن صحة العلاقة :

$$\langle x, y \rangle = \left[\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 \right] + i \left[\left\| \frac{x+iy}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-iy}{2} \right\|^2 \right]$$

تشكيل ، بحذر الجداء، سر لنظم.

الحل :

- $$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \left\langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2} \right\rangle$$
$$= \frac{1}{4}\langle x+y, x+y \rangle - \frac{1}{4}\langle x-y, x-y \rangle$$
$$= \frac{1}{4}\left[\|x\|^2 + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \|y\|^2 - \|x\|^2 + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle - \|y\|^2 \right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[2\langle x, y \rangle + 2\langle y, x \rangle \right] = \frac{1}{2}\left[2\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle \right] = \mathrm{Re}\langle x, y \rangle$$

- $$\left\| \frac{x+iy}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-iy}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left[i\langle x, y \rangle - i\langle y, x \rangle \right]$$
$$= \frac{1}{2} \times \left[2\,\mathrm{Im}\langle x, y \rangle \right] = \mathrm{Im}\langle x, y \rangle$$

وبالتالي فإن :

$$\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + i\operatorname{Im}\langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle$$

تمرين محلول (٤) :

لتكن x,y,z ثلاثة عناصر ما من H برهن صحة العلاقة:

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2$$

مساواة أبولونيوس

الحل :

بفرض أن: $z-y=\alpha-\beta$ & $z-x=\alpha+\beta$ عندئذ :

$$\alpha=z-\frac{1}{2}(x+y) \quad \& \quad \beta=\frac{1}{2}(y-x)$$

حسب مساواة متوازي الأضلاع يكون:

$$\|\alpha+\beta\|^2+\|\alpha-\beta\|^2=2\left(\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2\right)$$

نعوّض كلاً من α,β بما تساويه فنحصل على المطلوب.

تمرين محلول (٥) :

ليكن x,y عنصرين من فضاء هيلبرت H برهن على تكافؤ الشرطين التاليين :

(١) $x\perp y$

(٢) من أجل أي عدد عقدي α يكون $\|x\|\le\|x+\alpha y\|$

الحل :

$(2)\leftarrow(1)$

$$\|x+\alpha y\|^2=\langle x+\alpha y,x+\alpha y\rangle=\|x\|^2+|\alpha|^2.\|y\|^2+2\operatorname{Re}\alpha\langle x,y\rangle$$
$$=\|x\|^2+|\alpha|^2.\|y\|^2\ge\|x\|^2$$

وبالتالي :

$$\|x+\alpha y\|^2\ge\|x\|^2$$

$(1)\leftarrow(2)$

$$\|x\|\le\|x+\alpha y\|\Rightarrow\|x\|^2\le\|x+\alpha y\|^2$$
$$\|x\|^2\le\|x\|^2+\alpha\langle y,x\rangle+\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+|\alpha|^2.\|y\|^2$$
$$0\le\alpha\langle y,x\rangle+\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+|\alpha|^2.\|y\|^2$$

بأخذ : $\alpha=-\dfrac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$ نجد:

$$0\le-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}+\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}\Rightarrow$$
$$0\le-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}\le 0\Rightarrow|\langle x,y\rangle|=0\Rightarrow\langle x,y\rangle=0\Rightarrow x\perp y$$

تمرين محلول (٦) :

أثبت أنه في الفضاء $L_2[-\pi,\pi]$ تشكل العناصر :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\dots\dots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\dots\dots$$

مثال عام جملة تامة ومتعامدة.

جملة متعامدة منظمة وتامة فيه. أثبت أن متسلسلة فورييه للتابع $f(x)$ من الفضاء $L_2[-\pi,\pi]$ لها الشكل :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

وأن مساواة بارسيفال تأخذ الشكل:

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2$$

الحل :

إنّ الجملة : $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\dots\dots,\dfrac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\dfrac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\dots\dots$

تشكّل جملة متعامدة ومنظمة وتامّة في الفضاء $L_2[-\pi,\pi]$ لأنّ :

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} dx = 0 \; ; \; k = 1, 2, \ldots$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin \ell x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin \ell x}{\sqrt{\pi}} dx = 0 \; ; \; \ell = 1, 2, \ldots$$

$$\left\langle \frac{\sin \ell x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \ell x}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} dx = 0 \; ; \; k = 1, 2, \ldots \; ; \; \ell = 1, 2, \ldots$$

$= 1 \; ; \; k = \ell$

$$\left\langle \frac{\cos \ell x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \ell x}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} dx = \delta_{k\ell} \; ; \; k = 1, 2, \ldots \; ; \; \ell = 1, 2, \ldots$$

$= 0 \; ; \; k \neq \ell$

$$\left\langle \frac{\sin \ell x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \ell x}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} dx = \delta_{k\ell} \; ; \; k = 1, 2, \ldots \; ; \; \ell = 1, 2, \ldots$$

أي أن الجملة متعامدة نظامية . لدينا الآن أن :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k h_k = \alpha_0 h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k$$

$$= \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \alpha_1 \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + \alpha_2 \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + \alpha_3 \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} +$$

$$+ \alpha_4 \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}} + \ldots + \alpha_{2k-1} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \alpha_{2k} \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{2\alpha_0}{\sqrt{2\pi}}}_{a_o} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha_{2k-1}}{\sqrt{\pi}}}_{a_k} \cos kx + \underbrace{\frac{\alpha_{2k}}{\sqrt{\pi}}}_{b_k} \sin kx$$

حيث أصبح عندنا :

$$a_0 = \frac{2\alpha_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) . dx$$

$$a_k = \frac{\alpha_{2k-1}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\langle f(x), \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx . dx$$

$$b_k = \frac{\alpha_{2k}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\langle f(x), \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx . dx$$

من هنا نجد أن : $\langle f(x),a_0\rangle=0$ و $\langle f(x),a_k\rangle=0$ و $\langle f(x),b_k\rangle=0$ يعني أن $a_0=a_n=b_n=0$ وهذا يتحقق فقط من أجل $f(x)=0$ أي أن الجملة تامة .

مساواة بارسيفال هي: $\|f\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^2$ أو من الشكل:

$$\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left(|\alpha_{2k-1}|^2+|\alpha_{2k}|^2\right)+|\alpha_0|^2$$

$$\|f\|^2=|\alpha_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{2k-1}|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{2k}|^2$$

$$=\left|\frac{\sqrt{2\pi}}{2}a_0\right|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sqrt{\pi}\,a_k\right|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sqrt{\pi}\,b_k\right|^2$$

$$=\pi\frac{a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+b_k^2\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+b_k^2$$

تمرين محلول (٧) :

لتكن $\alpha_k=\langle x,h_k\rangle$ و $\beta_k=\langle y,h_k\rangle$ عوامل فوريه للعنصرين x و y من H بالنسبة للجملة المتعامدة المنظمة $h_1,h_2,h_3,\ldots.$ برهن صحة المساواة (مساواة بارسيفال) :

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\,\overline{\beta}_k$$

ثم استنتج منها علاقة بارسيفال التالية: $\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$

الحل:

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k h_k \quad \& \quad x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k h_k$$

$$\langle x,y\rangle=\lim_{n\to\infty}\left\langle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k,\sum_{k=1}^{n}\beta_k h_k\right\rangle$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\,\overline{\beta}_j\,\langle h_k,h_j\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\overline{\beta}_k$$

k=j

وعندما $y = x$ فإن :

$$\|x\|^2 = \langle x , x \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, \overline{\alpha}_k = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

تمرين محلول (٨) :

لتكن $h_1, h_2, \ldots\ldots$ جملة متعامدة منظمة في الفضاء H، برهن صحة العلاقة:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| . |\beta_k| \le \|x\| . \|y\| \quad ; \quad x , y \in H$$

حيث α_k هي عوامل فوريه للعنصر x و β_k هي عوامل فوريه للعنصر y .

الحل :

نعلم أن :
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| . |\beta_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

حيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (وذلك من متراجحة هولدر).

الآن وبأخذ $p = q = 2$ نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| . |\beta_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

لدينا من مساواة بارسيفال أن:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \;\Rightarrow\; \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 \;\Rightarrow\; \|y\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

وبالتالي فإنّ :
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| . |\beta_k| \le \|x\| . \|y\|$$

مثال عن جملة متعامدة منظمة :

تسمّى كثيرات الحدود التالية بكثيرات حدود لوجندر :

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$
$$P_n(x)=\frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \; ; \; n=1,2,3,....$$

فإذا أخذنا $[a,b]=[-1,+1]$ يكون لدينا :

$$\langle P_n(x),P_m(x)\rangle=\int_{-1}^{+1}P_n(x).P_m(x).dx=\begin{cases}0 & ; \; n\neq m\\ \frac{2}{2n+1} & ; \; n=m\end{cases}$$

لنضع :
$$h_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x) \quad ; \quad n=0,1,2,3,......$$

فنحصل على جملة متعامدة منظمة في فضاء هيلبرت $L_2[-1,+1]$ وهي :
$$h_0(x),h_1(x),h_2(x),........$$

تمرين محلول (٩) : دورة ،

لتكن لدينا الجملة: $\{v_1=(1,1,1)\,,v_2=(0,1,1)\,,v_3=(0,1,0)\}$ في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$، حوّل عناصر هذه القاعدة إلى عناصر متعامدة منظمة من الشكل $\{h_1,h_2,h_3\}$ باستخدام طريقة شميث .

الحل :

ليكن $x=(x_1,x_2,x_3)$ و $y=(y_1,y_2,y_3)$ عنصرين من $\mathbb{R}^3$ عندئذ يكون :
$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$
$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

لدينا :
$$\|v_1\|=\sqrt{\langle v_1,v_1\rangle}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}\Rightarrow$$
$$h_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

الآن لنضع:

$$h_2' = v_2 - \langle v_2, h_1 \rangle h_1 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\|h_2'\| = \sqrt{\langle h_2', h_2' \rangle} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

وبالتالي فإنّ:

$$h_2 = \frac{h_2'}{\|h_2'\|} = \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

الآن لنضع :

$$h_3' = v_3 - \langle v_3, h_2 \rangle h_2 - \langle v_3, h_1 \rangle h_1$$

$$= (0,1,0) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\|h_3'\| = \sqrt{\langle h_3', h' \rangle_3} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

وبالتالي فإنّ :

$$h_3 = \frac{h_3'}{\|h_3'\|} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

وبذلك نكون قد حصلنا على الجملة التالية :

$$h_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \; h_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \; h_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

نلاحظ أنّ :

$$\|h_1\| = \sqrt{\langle h_1, h_1 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1$$

$$\|h_2\| = \sqrt{\langle h_2, h_2 \rangle} = \sqrt{\frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 1$$

$$\|h_3\| = \sqrt{\langle h_3, h_3 \rangle} = \sqrt{0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\langle h_1, h_2 \rangle = -\frac{2}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{12}} = 0$$

$$\langle h_1,h_3\rangle = 0+\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}}=0$$

$$\langle h_2,h_3\rangle = 0+\frac{1}{\sqrt{12}}-\frac{1}{\sqrt{12}}=0$$

وبالتالي فإنّ الجملة التي أوجدناها منظمة ومتعامدة وتامّة حسب طريقة شميث .

تمرين محلول (١٠) :

ليكن لدينا :

$$x_1(t)=t^2 \quad , \quad x_2(t)=t \quad , \quad x_3(t)=1$$

حوّل x_1,x_2,x_3 إلى عناصر متعامدة منظمة على $[-1,+1]$ بالنسبة للجداء الداخلي المعرّف بالشكل :

$$\langle x,y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t).y(t)dt$$

ثمّ بيّن كيف تكتب هذه العناصر بدلالة القاعدة .

الحل :

بفرض أنّ h_1,h_2,h_3 هي عناصر الجملة المتعامدة والتي نريد الحصول عليها. إنّ :

$$\|x_1(t)\|^2=\langle x_1,x_1\rangle=\int_{-1}^{1} t^2t^2\,dt=\frac{2}{5} \;\Rightarrow\; \|x_1(t)\|=\sqrt{\frac{2}{5}}$$

وبالتالي فإنّ :

$$h_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}=\sqrt{\frac{5}{2}}\,t^2$$

لنضع الآن :

$$h_2'=x_2-\langle x_2,h_1\rangle h_1=t-\left(\int_{-1}^{1} t\,(\sqrt{\frac{5}{2}}t^2)dt\right)\times\sqrt{\frac{5}{2}}\,t^2=t-0=t$$

$$\|h_2'\|=\sqrt{\langle h_2',h'\rangle_2}=\left(\int_{-1}^{1} t^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

وبالتالي فإنّ :

$$h_2=\frac{h_2'}{\|h_2'\|}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,t$$

لنضع الآن :

$$h_3' = x_2 - \langle x_3, h_2 \rangle h_2 - \langle x_3, h_1 \rangle h_1$$

$$= 1 - \overbrace{\left(\int_{-1}^{1} 1.(\sqrt{\frac{3}{2}}t)dt \right)}^{0} \times \sqrt{\frac{3}{2}}t^2 - \overbrace{\left(\int_{-1}^{1} 1.(\sqrt{\frac{5}{2}}t.dt \right)}^{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}} \times \sqrt{\frac{5}{2}}t^2 = 1 - \frac{5}{3}t^2$$

$$\|h_3'\| = \sqrt{\langle h_3', h_3' \rangle} = \left(\int_{-1}^{1} (1 - \frac{5}{3}t^2)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{-1}^{1} (1 + \frac{25}{9}t^4 - \frac{10}{3}t^2) dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

وبالتالي فإنّ :

$$h_3 = \frac{h_3'}{\|h_3'\|} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{5}{3}t^2 \right)$$

وبذلك نكون قد حصلنا على الجملة الآتية :

$$h_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}t^2 \quad , \quad h_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}t \quad , \quad h_3 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{5}{3}t^2 \right)$$

لاحظ أنّ :

$$\| h_1 \| = \left(\frac{5}{2} \int_{-1}^{1} t^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\| h_2 \| = \left(\frac{3}{2} \int_{-1}^{1} t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\| h_2 \| = \left(\frac{9}{8} \int_{-1}^{1} (1 - \frac{5}{3}t^2)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\langle h_1,h_2\rangle=\frac{\sqrt{15}}{2}\int_{-1}^{1}t^3dt=0$$

$$\langle h_1,h_3\rangle=\frac{3\sqrt{5}}{4}\int_{-1}^{1}t^2\left(1-\frac{5}{3}t^2\right)dt=0$$

$$\langle h_2,h_3\rangle=\frac{3\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{1}t\left(1-\frac{5}{3}t^2\right)dt=0$$

وبالتالي فإنّ الجملة التي أوجدناها متعامدة منظمة بحسب طريقة شميث .

لدينا : $x_1=\sqrt{\frac{2}{5}}.h_1$

$$h_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}\Rightarrow x_1=\|x_1\|.h_1\Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{2}{5}}.h_1$$

كما أن :

$$h_2=\frac{h_2'}{\|h_2'\|}=\frac{x_2-\langle x_2,h_1\rangle h_1}{\|h_2'\|}\Rightarrow$$

$$x_2=\langle x_2,h_1\rangle h_1+\|h_2'\|.h_2\Rightarrow$$

$$x_2=0.h_1+\sqrt{\frac{2}{3}}h_2$$

وأيضاً :

$$h_3=\frac{h_3'}{\|h_3'\|}=\frac{x_3-\langle x_3,h\rangle_2 h_2-\langle x_3,h_1\rangle h_1}{\|h_3'\|}\Rightarrow$$

$$x_3=\langle x_3,h_1\rangle h_1+\langle x_3,h_2\rangle h_2+\|h_3'\|.h_3\Rightarrow$$

$$x_3=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}.h_1+0.h_2+\frac{2\sqrt{2}}{3}h_3$$

ملاحظة (٧) :

نستطيع إنجاز الطلب الأخير بحساب عوامل فورييه فنكتب :

$$x_1=\langle x_1,h_1\rangle h_1+\langle x_1,h_2\rangle h_2+\langle x_1,h_3\rangle h_3$$

$$x_2=\langle x_2,h_1\rangle h_1+\langle x_2,h_2\rangle h_2+\langle x_2,h_3\rangle h_3$$

$$x_3=\langle x_3,h_1\rangle h_1+\langle x_3,h_2\rangle h_2+\langle x_3,h_3\rangle h_3$$

فنجد أنّ : $x_1=\sqrt{\frac{2}{5}}.h$, $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}h_2$, $x_3=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}.h_1+\frac{2\sqrt{2}}{3}h_3$

تمارين غير محلولة (الفصل الرابع)

١- أثبت الفضاء $L_p[a,b]$ عندما يكون $p \neq 2$ ليس فضاء هيلبرت.

٢- إذا كان $\langle x,y \rangle = 0$ مهما تكن y من فضاء هيلبرت H، فأثبت أن $x=\theta$.

٣- بفرض أن X, Y فضائي جداء داخلي حيث $\langle .,. \rangle_X$ و $\langle .,. \rangle_Y$ الجداء الداخلي لكل منهما على الترتيب، وليكن $Z = X \times Y$ فضاء الجداء الديكارتي للفضاءين X و Y، أثبت أن التابع $\langle .,. \rangle : Z \times Z \longrightarrow \mathfrak{F}$ المعرف بالشكل:
$\langle (u,v),(x,y) \rangle = \langle u,x \rangle_X + \langle v,y \rangle_Y$ هو جداء داخلي على $Z \times Z$.

٤- بفرض أن $X = \mathbb{R}^3$ و $A = \{(a_1,a_2,0) : a_1,a_2 \in \mathbb{R}\}$ أثبت أن:

$$A^{\perp} = \{(0,0,x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$$

٥- إذا كان X فضاء جداء داخلي و $A \subset X$ أثبت أن:

(a) $0 \in A^{\perp}$

(b) إذا كان $0 \in A$ عندئذٍ $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ وخلافاً لذلك $A \cap A^{\perp} = \phi$

(c) $X^{\perp} = \{0\}$, $X = \{0\}^{\perp}$

(d) لتكن $S(a,r)$ كرة مفتوحة في A ومن أجل $a \in X$ و $r > 0$ أثبت أن $A^{\perp} = \{0\}$.

(e) إذا كان $B \subset A$ عندئذٍ $A^{\perp} \subset B^{\perp}$.

٦- بفرض أن Y فضاء جزئي خطي من فضاء الجداء الداخلي X أثبت أن:

$$x \in Y^{\perp} \Leftrightarrow \|x-y\| \geq \|x\| \; ; \; \forall y \in Y$$

٧- بفرض أن H فضاء هيلبرت، $\{e_n\}$ متتالية متعامدة في H عندئذٍ الشروط التالية متكافئة:

(a) $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$

(b) $\overline{sp}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = H$

٨- استخدم طريقة غرام – شميث للتعامد لإيجاد القاعدة المتعامدة من أجل $\{1,x,x^2\}$ sp في $L_2[-1,1]$.

٩- إذا كانت $X\in\mathbb{R}^n$ و $A=\{a\}$ حيث الشعاع $a=(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ مغاير للصفر. أثبت أن :

$$A^{\perp}=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\sum_{J=1}^{n}a_J x_J=0\right\}$$

١٠- إذا كان $A=\left\{\{x_n\}\in\ell_2:x_{2n}=0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\right\}$ أوجد $A^{\perp}$.

١١- بفرض X,Y فضاءين جزئيين خطيين من فضاء هيلبرت H وليكن :

$$X+Y=\{x+y:x\subset X\ ,\ y\in Y\}$$

أثبت أن : $(X+Y)^{\perp}=X^{\perp}\cap Y^{\perp}$.

١٢- بفرض أن X فضاء جداء داخلي وليكن $A\subset X$ أثبت أن: $A^{\perp}=(\bar{A})^{\perp}$.

١٣- بفرض أن H فضاء هيلبرت ولتكن $Y\in H/\{0\}$ وبفرض أن $S=sp(Y)$

أثبت أن: $\{x\in H\ ;\ (x,Y)=0\}^{\perp}=S$

١٤- بفرض أن Y فضاء جزئياً خطياً مغلقاً من فضاء هيلبرت H . أثبت أنه إذا كانت $H\neq Y$ عندئذٍ $Y^{\perp}\neq\{0\}$ ثم تحقق فيما إذا كانت العلاقة صحيحة من أجل Y غير مغلق.

١٥- بفرض أن X فضاء جداء داخلي ، $A\subset X$ مجموعة غير خالية عندئذٍ أثبت أن:

(a) $\left(A^{\perp}\right)^{\perp}=\overline{sp}\,A$

(b) $\left(A^{\perp\perp}\right)^{\perp}=A^{\perp}$